

15. SISTEMAS INCOMPATIBLES

Dado el sistema incompatible $Ax = b$ con $A \in \mathcal{M}_{n \times m}$, $x \in \mathcal{M}_{m \times 1}$ y $b \in \mathcal{M}_{n \times 1}$, se llama **solución aproximada de mínimos cuadrados** a todo vector $\hat{x} \in \mathcal{M}_{m \times 1}$ que hace mínima la distancia entre Ax y b , es decir tal que $\|A\hat{x} - b\| \leq \|Ax - b\|$ para cualquier otro vector $x \in \mathcal{M}_{m \times 1}$.

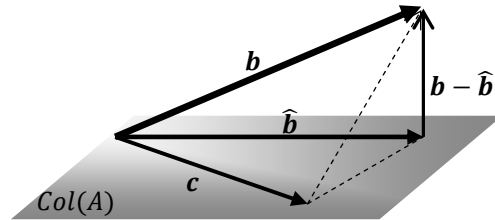
Si $\hat{x} \in \mathcal{M}_{m \times 1}$ es una solución aproximada de mínimos cuadrados del sistema incompatible $Ax = b$, se llama **vector error** al vector $E(\hat{x}) = A\hat{x} - b$.

OBSERVACIONES

- Para todo $x \in \mathcal{M}_{m \times 1}$ el vector $Ax \in \text{Col}(A)$, ya que

$$Ax = x_1 c_1 + x_2 c_2 + \cdots + x_m c_m \in \text{Col}(A)$$

- Sea $\hat{x} \in \mathcal{M}_{m \times 1}$ una solución de mínimos cuadrados del sistema $Ax = b$ y sea $\hat{b} = A\hat{x}$, entonces $\|\hat{b} - b\| \leq \|c - b\|$ para cualquier $c \in \text{Col}(A)$, es decir, \hat{b} es el vector del espacio $\text{Col}(A)$ más cercano a b y por tanto $\hat{b} = p_{\text{Col}(A)}(b)$ es el vector **proyección ortogonal** de b sobre $\text{Col}(A)$.



- Si cada vector columna de la matriz A es ortogonal al vector $b - \hat{b}$, entonces el resultado de multiplicar A^t por $b - \hat{b}$ es el vector cero, y se cumple que:

$$A^t(b - \hat{b}) = 0 \Leftrightarrow A^t(b - A\hat{x}) = 0 \Leftrightarrow A^t b - A^t A\hat{x} = 0 \Leftrightarrow A^t A\hat{x} = A^t b$$

TEOREMA DE MÍNIMOS CUADRADOS

El conjunto de soluciones aproximadas por mínimos cuadrados del sistema incompatible $Ax = b$ coincide con el conjunto de soluciones clásicas del sistema compatible $A^t Ax = A^t b$.

EJEMPLO 11:

Calcular las soluciones aproximadas por mínimos cuadrados, y el vector error, del sistema

$$\begin{cases} x - y = 1 \\ y + z = 0 \\ x + y + 2z = -1 \end{cases}$$

Solución

La expresión matricial del sistema es $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Se calcula el rango de la matriz de coeficientes y el rango de la matriz ampliada:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & -1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & -2 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{array} \right)$$

La matriz de coeficientes tiene rango 2, y la matriz ampliada tiene rango 3, por tanto el sistema es incompatible.

Se transforma el sistema en uno compatible multiplicando por A^t ambos miembros de la igualdad:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Se resuelve el nuevo sistema por el método de Gauss:

$$(A^t A | A^t \mathbf{b}) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & -2 \\ 0 & 3 & 3 & -2 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$\begin{cases} x + z = 0 \\ y + z = -2/3 \end{cases} \xrightarrow{z=\lambda} \begin{cases} x + z = 0 \\ y + z = -2/3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -\lambda \\ y = -2/3 - \lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

El vector error es: $E(\hat{\mathbf{x}}) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\lambda \\ -2/3 - \lambda \\ \lambda \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/3 \\ -2/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}$

Como ocurre en este ejemplo, el vector error nunca depende de los parámetros que aparezcan en la solución. Siempre es constante y perpendicular a todas las columnas de la matriz A .

EJEMPLO 12:

Cierta partícula se mueve siguiendo una trayectoria parabólica $f(t) = a + bt + ct^2$. Se han obtenido los siguientes datos experimentales sobre su posición: $f(-2) = -1$, $f(-1) = -4$, $f(0) = -3$, $f(1) = -2$, $f(2) = 0$. Determinar la ecuación de la trayectoria.

Solución:

Si $f(t) = a + bt + ct^2$, los valores a, b y c deben verificar las ecuaciones siguientes:

$$\begin{cases} f(-2) = -1 \\ f(-1) = -4 \\ f(0) = -3 \\ f(1) = -2 \\ f(2) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a - 2b + 4c = -1 \\ a - b + c = -4 \\ a = -3 \\ a + b + c = -2 \\ a + 2b + 4c = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ -3 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Pero el sistema obtenido es incompatible:

$$(A|b) \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & -3 & -3 \\ 0 & 2 & -4 & -2 \\ 0 & 3 & -3 & -1 \\ 0 & 4 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 6 & 8 \\ 0 & 0 & 12 & 13 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & -11 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Se calcula una solución aproximada por mínimos cuadrados, para ello se transforma el sistema en uno compatible multiplicando por la traspuesta de la matriz de coeficientes del sistema:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ -3 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

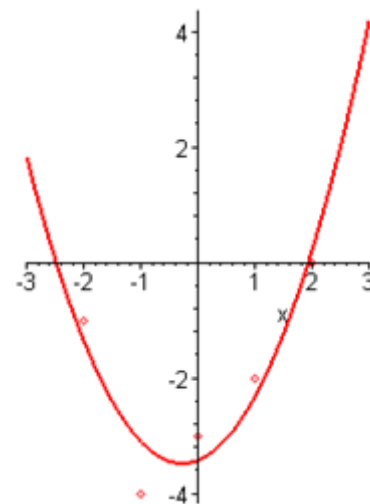
$$\begin{pmatrix} 5 & 0 & 10 \\ 0 & 10 & 0 \\ 10 & 0 & 34 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 \\ 4 \\ -10 \end{pmatrix}$$

Se resuelve el sistema obtenido:

$$(A^t A | A^t b) \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 5 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 14 & 10 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -24/7 \\ 0 & 1 & 0 & 2/5 \\ 0 & 0 & 1 & 5/7 \end{pmatrix}$$

La solución es:

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -24/7 \\ 2/5 \\ 5/7 \end{pmatrix}$$



Y la trayectoria obtenida como solución aproximada por mínimos cuadrados:

$$f(t) = -\frac{24}{7} + \frac{2}{5}t + \frac{5}{7}t^2$$